

Semestrální práce

Numerické metody II

Marek Firla 200793

Studijní skupina: 2 A/1

Úterý 14:00

**Obsah**

[1. Lotka-Volterra model 3](#_Toc7259371)

[2. Explicitní Eulerova metoda. 4](#_Toc7259372)

[2.1. Přesnost 4](#_Toc7259373)

[2.1.1 Diskretizační chyby 4](#_Toc7259374)

[2.1.2 Zaokrouhlovací chyby 4](#_Toc7259375)

[2.2. Stabilita 4](#_Toc7259376)

[3. Explicitní Rungovy-Kuttovy metody 6](#_Toc7259377)

[3.1. Přesnost 6](#_Toc7259378)

[3.2. Stabilita 6](#_Toc7259379)

[4. Zadání: 7](#_Toc7259380)

[5. Řešení Eulerovou explicitní metodou 8](#_Toc7259381)

[6. Řešení Explicitní Rungovy-Kuttovou metodou 3. řádu 8](#_Toc7259382)

[7. Srovnání řečení s profesionálním řešičem 8](#_Toc7259383)

[8. Tuhost 8](#_Toc7259384)

# Lotka-Volterra model

Taktéž nazýván jako model predátor kořist. Tento model je jeden z jednodušších modelů, který popisuje interakci a vývoj počtu dravců a kořisti.

Formulace modelu

Velikost populace kořisti v čase t

Rovnice by vyjadřovala růst populace kořisti x=x(t) bez přítomnosti predátora. Tento růst by pobíhal exponenciálně za předpokladu že *a faktor množení kořisti* je kladná konstanta.

Velikost populace v čase t za přítomnosti predátorů:

Rovnice vyjadřuje stav populace kořisti, pokud je lovena predátory. Konstanta *b koeficient predace* definuje úspěšnost lovce a je kladná konstanta.

Velikost úbytku predátorů

Rovnice vyjadřuje rychlost úhynů predátorů c je taktéž kladná konstanta

Velikost růstu populace predátorů, pokud je dostatek kořisti

Rovnice vyjadřuje stav populace predátorů v závislosti na množství kořisti, kde konstanta *p* představuje *reprodukční míru predátorů na jednu kořist.*

Počáteční podmínky x(0)=d a y(0)=e znamenají počáteční stavy populací kořisti a predátora.

# Explicitní Eulerova metoda.

Jedná se o jednu z nejjednodušších numerických metod pro řešení obecných diferenciálních rovnic prvního řádu. Její odvození vychází s Taylorovy formule:

Na základě předpokladu

A při zanedbání členu

Obdržíme předpis explicitní Eulerovy metody

## Přesnost

### Diskretizační chyby

Přesnost numerické metody měříme pomocí tzv. lokální diskretizační chyby což je chyba v každém kroku metody za lokalizačního předpokladu, že

Pro EE metodu:

a tedy ,kde

### Zaokrouhlovací chyby

Pokud se dopouštíme zaokrouhlovací chyby mezi kroky pak velkost chyby nepřesáhne  pro Eulerovu explicitní metodu potom platí:

, kde C, K jsou konstanty

Vliv zaokrouhlovací chyby se projeví až po extrémně velkém počtu kroků. U většina úloh je však tento vliv nepodstatný.

## Stabilita

Úloha bude stabilní, pokud na rovnoměrném dělení bude řešení úlohy splňovat podmínku stability:

Pokut tuto podmínku aplikujeme na takzvanou testovací úlohu

Pak obdržíme:

Podmínka pak bude splněna když

Pro reálné je vyžadován krok

# Explicitní Rungovy-Kuttovy metody

Obecný tvar

kde koeficienty ki jsou určeny předpisem

.

kde bi, ci, aij jsou konstanty definující konkrétní metodu

Koeficienty ki jsou směrnicemi lokálních řešení procházejícími body [,kde:

Bod [tn,yn] tedy propojíme s dalším bodem [tn+1,yn+1] přímkou, která bude mít směrnici

pro kterou platí

Při volbě konstant ci,bi, aij pro stupeň s je zvykem tyto konstanty zapisovat do Butcherovy tabulky.

Pro metodu 3 řádu s=3 pak pro tyto konstanty platí tyto podmínky:

## Přesnost

Při odhadu přesnosti vycházíme z použití dvou metod řádu p a řádu p+1. Z vypočtených hodnot se pak získá odhad lokální chyby

Tyto obě metody pak leze zapisovat do takzvaná rozšířené Butcherovy tabulky.

## Stabilita

Pro určení stability se používá testovací úloha, kterou vyřešíme explicitní Rungovy-Kuttovou metodou s rovnoměrným dělením kroku.

Po vyřešení obdržíme

, kde Ps je polynom stupně s určený pomocí konstant bi, aij

Podmínky stability je tedy splněna právě tehdy, když , neboli leží v oblasti absolutní stability RA

# Zadání:

Zadaná diferenciální soustava rovnic

Zadaná koeficienty:

a=1

b=0,03

c=0,4

p=0,01

Zadané počáteční podmínky

x(0)=15

y(0)=15

Zkoumaný interval

t0=0

tk=60

# Řešení Eulerovou explicitní metodou

V řešení vidíme dvojici křivek, které udávají stavy populací kořisti a predátorů. Populace kořisti nejdříve roste, jelikož počet predátorů není dostatečný. Roste však i populace predátorů, jelikož mají dostatek kořisti, a to až do bodu kdy začne být v prostředí predátorů příliš a začne klesat množství populace kořisti. Klesající populace kořisti neuživí stávající populací predátorů, kteří začnou vymírat, a to až do bodu kdy jich bude predátorů natolik malý počet že umožní růst populace kořisti. Tyto závislosti pak vytváří periodickou funkci růstů a poklesů populací.

# Řešení Explicitní Rungovy-Kuttovou metodou 3. řádu

# Srovnání metod

# Srovnání řečení s profesionálním řešičem

# Tuhost